制御系解析プログラムＫＭＡＰ
（Z 接続法による制御系解析）

H27(2015).6.13

片柳亮二

第１章　はじめに

制御系解析プログラムＫＭＡＰ(ケーマップ)は，航空機の運動解析用に開発されたソフトウェアです．これをバージョンアップする形で．制御系設計解析機能をはじめ各種解析に必要な機能を初学者にも簡単に使えるように追加発展しているものです．

ＫＭＡＰを用いると制御系が簡単に構成できます．それは，複雑な伝達関数も一般的に基本的な伝達関数要素のかけ算によって表すことができることから,そのＫＭＡＰではその原理を用いて制御系を構成します．

以下，ＫＭＡＰによる制御系解析の基本となるＺ接続法について解説します．

第２章　Ｚ接続法による制御系解析

ＫＭＡＰによる制御系解析に用いられるＺ接続法について述べる.

（１）伝達関数の極および零点

伝達関数の分母および分子は，一般的には次のようなsの高次方程式で表される.

$$G(s)=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{2.1}$$

(2.1)式の分母=0　の式は特性方程式と呼ばれる．いまそのn個の解を$s=p_1,\cdots,p_n$とすると，このsは極または特性根と呼ばれる．“特性根”といわれるのは,その値によって(2.1)式で表されるシステムの固有の特性(システムが外乱を受けたときの減衰特性など)が決まるからである.

(2.1)式の分子=0　のm個の解を$s=q_1,\cdots,q_m$とすると，このsは零点と呼ばれる.このとき,(2.1)式は極および零点を用いて次のように表される.

$$G(s)=\frac{b_0(s-q_1)\times(s-q_2)\times\cdots\times(s-q_m)}{(s-p_1)\times(s-p_2)\times\cdots\times(s-p_n)} \tag{2.2}$$

すなわち,伝達関数で表されるシステムの特性は,ラプラス平面上の**極・零点配置**によって決定される．極はシステムの固有の特性を決め，零点は入力に対する応答特性を決めるものである.

（２）伝達関数の分割

$$G(s)=\frac{b_0(s-q_1)\times(s-q_2)\times\cdots\times(s-q_m)}{(s-p_1)\times(s-p_2)\times\cdots\times(s-p_n)} \tag{2.3}$$

この伝達関数の分母と分子は，($s-s_i$)のかけ算で与えられる.

$$G(s)=b_0\frac{s-q_1}{s-p_1}\times\frac{s-q_2}{s-p_2}\times\cdots\times\frac{s-q_m}{s-p_m}\times\frac{1}{s-p_{m+1}}\times\cdots\times\frac{1}{s-p_n} \tag{2.4}$$

この式の右辺の後半部の分子が１になっているのは，一般的に分母の次数(n)が分子の次数(m)よりも等しいかまたは大きいことによる.

分母の極p_iが実数の場合は，($s-p_i$)の項は，一般的に少し変形した次

の形式で表現される．

1 次遅れ形（1 次遅れフィルタ）

$$\frac{1}{s-p_i}=T_i\times\frac{1}{1+T_i\,s} \quad ，\quad ただし\ \ T_i=\frac{1}{-p_i} \tag{2.5a}$$

リードラグ

$$\frac{s-q_i}{s-p_i}=G_i\times\frac{1+T_{i2}\,s}{1+T_{i1}\,s} \quad ，\quad ただし\ \ G_i=\frac{q_i}{p_i},\quad T_{i1}=\frac{1}{-p_i},\quad T_{i2}=\frac{1}{-q_i} \tag{2.5b}$$

ハイパス

$$\frac{s}{s-p_i}=\frac{T_i\,s}{1+T_i\,s} \quad ，\quad ただし\ \ T_i=\frac{1}{-p_i} \tag{2.5c}$$

T_i，T_{i1}，T_{i2}は時定数（秒），G_iはゲインと呼ばれる．

2 次遅れ形（2 次遅れフィルタ）

$$\frac{1}{(s-p_1)\times(s-\bar{p}_1)}=\frac{1}{\omega_1^{\ 2}}\times\frac{\omega_1^{\ 2}}{s^2+2\zeta_1\omega_1\,s+\omega_1^{\ 2}} \tag{2.6b}$$

$\bar{p}_1$は極 p_1の共役複素数，$2\zeta_1\omega_1=-(p_1+\bar{p}_1)$，　$\omega_1^{\ 2}=p_1\,\bar{p}_1$ (2.6c)

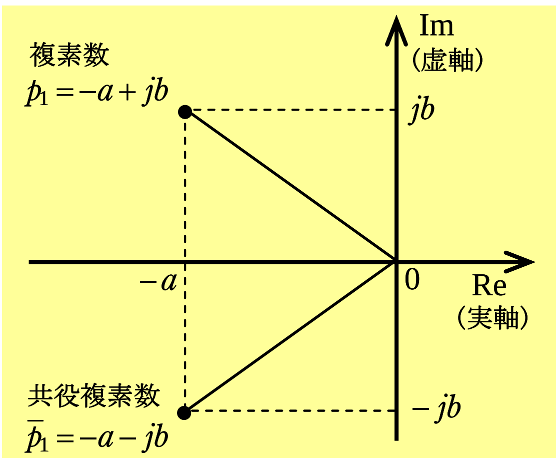

図 2.1　複素数と共役複素数

分母の極が複素数の場合(例えばp_1が複素数の場合)は，図 2.1 に示すように必ず**共役複素数**（実数部が等しく虚数部が反対符号の複素数で$\bar{p}_1$と表す）が存在し，複素数とその共役複素数との一対でひとつの振動特性根を表す．

このようなフィルタを用いると，(2.1)式のような分母のsの次数が大きな伝達関数は，表 2.1 に示す伝達関数の基本要素のかけ算で表すことができる．

$$G(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=K\times\frac{1}{s}\times\frac{1}{1+T_1s}\times\frac{T_2s}{1+T_2s}\times\frac{1+T_3's}{1+T_3s}\times \frac{\omega_1^2}{s^2+2\zeta_1\omega_1s+\omega_1^2}\times\frac{s}{s^2+2\zeta_2\omega_2s+\omega_2^2}\times\frac{s^2+2\zeta_3'\omega_3's+\omega_3'^2}{s^2+2\zeta_3\omega_3s+\omega_3^2}\times\cdots \tag{2.7}$$

この伝達関数は，制御系全体の特性だけでなく，制御対象を制御するための制御則においても表 2.1 の基本要素を用いて表すことができる．

表 2.1　伝達関数の基本要素

基本要素	伝達関数
積分	$\frac{1}{s}$
1 次遅れ形（1次遅れフィルタ）	$\frac{1}{1+Ts}$
ハイパスフィルタ	$\frac{Ts}{1+Ts}$
リードラグフィルタ	$\frac{1+T_2s}{1+T_1s}$
2次遅れ形（2次遅れフィルタ）	$\frac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$
1 次/2次形	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$
2次/2次形（ノッチフィルタ）	$\frac{s^2+2\zeta_2\omega_2s+\omega_2{}^2}{s^2+2\zeta_1\omega_1s+\omega_1{}^2}$

全ての伝達関数は，これらの**基本要素のかけ算**で表される

この表で，Tは**時定数**(秒)，ζは**減衰比**(無次元)，ωは**固有振動数**(rad/s)である．この基本要素フィルタはどのような特性なのかをみるために，参考までにステップ応答を図 2.2 に示す．

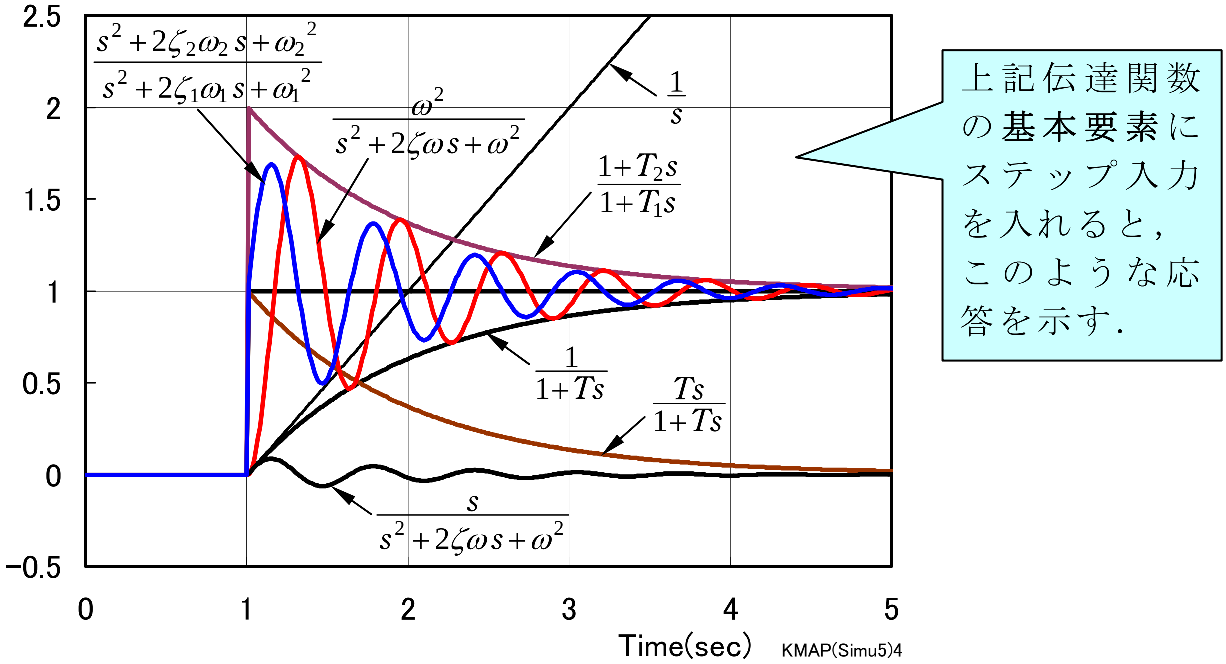

図 2.2　伝達関数の基本要素の特性

（３）Ｚ接続法による伝達関数表現

さて，一般の制御系は表 2.1 に示す伝達関数の基本要素のかけ算で表されることから，制御系の解析する場合に伝達関数を構成する基本要素の入出力にＺ変数を割り当て，伝達関数全体の入力から出力までをＺ変数でつなぐことで伝達関数を表すと便利である．ここでは，この方法を **“Ｚ接続法”(Z-Connection Method)**と呼ぶことにする．図 2.3 は，Ｚ接続法による伝達関数表現の一例である．

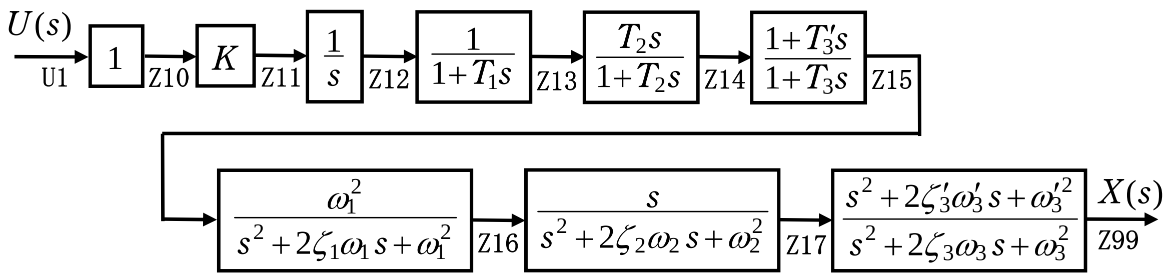

図 2.3　Ｚ接続法による伝達関数表現例

一般の制御系を図 2.3 のように表すと，その制御系の極・零点が明確となり，制御系の構造の解釈が容易になる．また，複雑な制御系においても，解析を見通しよく行うことができる．

フィードバックがある場合も，そのＺ変数を引き算するだけで簡単にフィードバック制御系を構成できる．具体例を図 2.4 に示す．

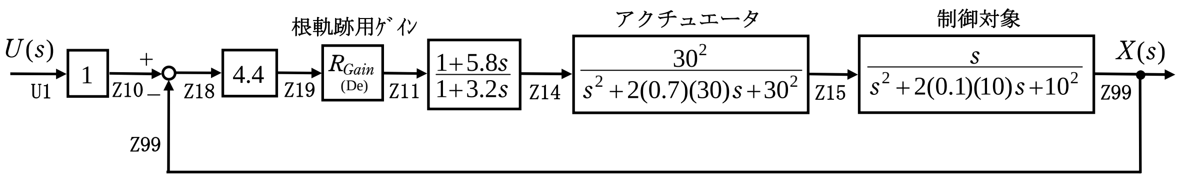

図 2.4　フィードバックがある場合のＺ接続法表現例

以上